2013年 医学部 第3問

3 次の各問いに答えよ．

(1) $x \geqq 1$，$k = 0$，1，2，… として

$$I_k(x) = \int \frac{(\log x)^k}{x^2}\,dx$$

とおくとき，$I_0(x)$ を求め，$I_{k+1}(x)$ を $I_k(x)$ を用いて表せ．また $I_4(x)$ を求めよ．

(2) $x > 0$ で不等式 $\log x \leqq \frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}$ が成り立つことを証明せよ．

(3) 関数 $f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$ に関する以下の各問いに答えよ．

(i) $y = f(x)$ $(x \geqq 1)$ の極値，極限 $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ を調べ，増減表を作り，グラフの概形を描け．

(ii) $n > 1$ として，$y = f(x)$ と2直線 $x = n$，$x = n^2$ および x 軸で囲まれる部分 D_n の面積 S_n を求めよ．

(iii) D_n を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_n を求めよ．

(iv) 極限 $\lim_{n \to \infty} \frac{nV_n}{(\log n)S_n}$ の値を求めよ．