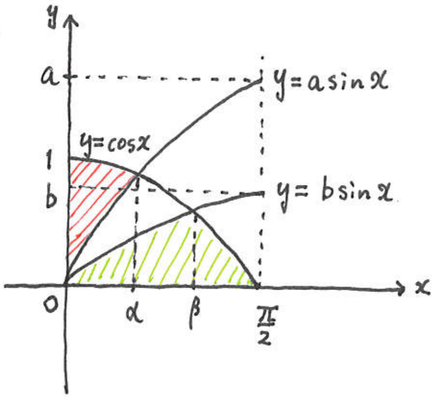
0001674365238999

日本女子大学

2013年 理学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 曲線 $y = \cos x \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積が，2つの曲線 $y = a\sin x$，$y = b\sin x\ (0 < b < a)$ によって3等分されるとき，定数 a，b の値を求めよ．



$y=\cos x$ と $y=a\sin x$ の交点の x 座標 $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ を α，$y=\cos x$ と $y=b\sin x$ の交点の x 座標を β とおく ($\alpha < \beta$)

このとき，$\cos\alpha = a\sin\alpha$ …①

$\cos\beta = b\sin\beta$ …② が成り立つ

また，$y=\cos x$，$y=a\sin x$，y 軸で囲まれた領域を S_1，

$y=\cos x$，$y=b\sin x$，x 軸で 〃 S_2，

$y=\cos x$，x 軸，y 軸で 〃 $S \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

与えられた条件 $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = \frac{S}{3}$ である．…(*)

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \cdots ③$$

$$S_1 = \int_0^{\alpha} \cos x - a\sin x\, dx = \Big[\sin x + a\cos x\Big]_0^{\alpha} = \sin\alpha + a\cos\alpha - a$$

①の両辺を2乗して計算すると，$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$，$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

②も同様にして，$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}$，$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}$

$$\therefore S_1 = \sqrt{a^2+1} - a \quad \cdots ④$$

$$S_2 = \int_0^{\beta} b\sin x\, dx + \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \Big[-b\cos x\Big]_0^{\beta} + \Big[\sin x\Big]_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} = -b\cos\beta + b + 1 - \sin\beta$$

$$= b + 1 - \sqrt{b^2+1} \quad \cdots ⑤$$

(*)と③，④より，$3(\sqrt{a^2+1} - a) = 1$ $\therefore \sqrt{a^2+1} = a + \frac{1}{3}$ $\therefore a^2 + 1 = a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}$

これを解いて，$a = \frac{4}{3}$，同様に，$b = \frac{5}{12}$ //