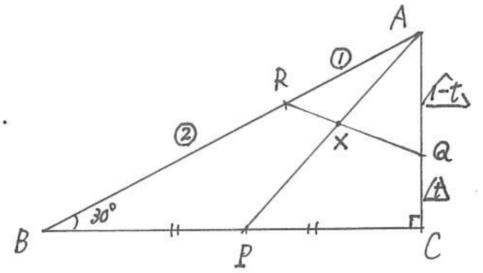
日本女子大学

2015年 家政学部 第2問

$\boxed{2}$ $\triangle$ABCにおいて $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ とする．辺BCを1：1に内分する点をP，辺CAを $t:(1-t)$ に内分する点をQ，辺ABを1：2に内分する点をRとする．ただし，$0 < t < 1$ とする．また，線分APと線分QRの交点をXとする．

(1) 線分APと線分QRが垂直になるように，実数 t の値を定めよ．

(2) (1)で定めた t の値に対して，面積の比 $\triangle$ARX：$\triangle$ABC を求めよ．



(1) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{QR} = -(1-t)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\therefore\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{QR} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}|^2 + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(1-t)|\overrightarrow{AC}|^2$

ここで，$|\overrightarrow{AC}| = k$ とおくと，$|\overrightarrow{AB}| = 2k$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ = k^2$ より

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{QR} = \frac{2}{3}k^2 + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}\right)k^2 - \frac{1}{2}(1-t)k^2$

$= k^2\left(t - \frac{1}{6}\right)$

$AP \perp QR$ より $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{QR} = 0$　$k > 0$ なので，$\underline{t = \frac{1}{6}}$ //

(2) $RX : XQ = s : 1-s$ $(0 < s < 1)$ とおくと．

$\overrightarrow{AX} = (1-s)\overrightarrow{AR} + s\overrightarrow{AQ}$

$= \frac{1}{3}(1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}s\overrightarrow{AC}$ …①

一方，3点A，X，Pは同一直線上にあるから

$\overrightarrow{AX} = u\overrightarrow{AP}$ (u：実数) と表せる

$\therefore\ \overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}u\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}u\overrightarrow{AC}$ …②

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は一次独立なので，①，②より $\frac{1}{3}(1-s) = \frac{1}{2}u$ かつ $\frac{5}{6}s = \frac{1}{2}u$

$\therefore\ s = \frac{2}{7}$，$u = \frac{10}{21}$

$\therefore\ \triangle ARX = \triangle ABC \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{10}{21} = \frac{5}{63}\triangle ABC$

$\therefore\ \triangle ARX : \triangle ABC = \underline{5:63}$ //