日本女子大学

2015年 家政学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面上の2つの放物線 $y=4x^2+12x+2$ と $y=x^2+2$ をそれぞれ C_1 と C_2 とする．放物線 C_1 と C_2 の両方に接し，傾きが正の直線を ℓ とする．以下の問いに答えよ．

C_1 $y=4(x+\frac{3}{2})^2-7$

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 直線 ℓ の方程式を $y=ax+b$（a, b は定数）とおく．C_1 と ℓ の接点の x 座標と C_2 と ℓ の接点の x 座標の小さい方を s，大きい方を t とする．連立不等式

$$y \leqq 4x^2+12x+2, \quad y \leqq x^2+2, \quad y \geqq ax+b, \quad s \leqq x \leqq t$$

の表す領域の面積を求めよ．

(1) $\ell: y=ax+b$ $(a>0)$ とおくと．

$4x^2+12x+2-(ax+b)=0 \iff 4x^2+(12-a)x+2-b=0$ …ⓐ

これが重解をもつので，判別式を D_1 とおくと．

$D_1=(12-a)^2-4\cdot4\cdot(2-b)=0$

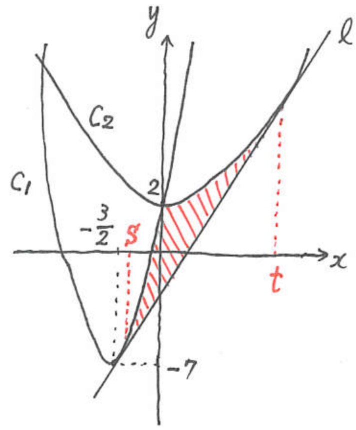
$\therefore a^2-24a+16b+112=0$ …①

$x^2+2-(ax+b)=0 \iff x^2-ax+2-b=0$ …ⓑ

これが重解をもつので，判別式を D_2 とおくと．

$D_2=a^2-4(2-b)=0$

$\therefore a^2+4b-8=0$ …②



① − ② × 4 より．$-3a^2-24a+144=0$

$\therefore (a-4)(a+12)=0$ 　$a>0$ より．$a=4$ 　このとき②より．$b=-2$

$\therefore \underline{\ell: y=4x-2}$ //

(2) $a=4, b=-2$ をⓐに代入して．$(x+1)^2=0$ 　$\therefore x=-1$

ⓑに代入して．$(x-2)^2=0$ 　$\therefore x=2$ 　$\therefore s=-1,\ t=2$

右上図より．$S=\int_{-1}^{0} 4x^2+12x+2-(4x-2)\,dx+\int_{0}^{2} x^2+2-(4x-2)\,dx$

$=\int_{-1}^{0} 4(x+1)^2dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx$

$=4\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{0}^{2}$

$=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}$

$=\underline{4}$ //