0001655544438999

埼玉大学

2014年 理学部 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 実数 a, b は $a>b>0$ および $a^2-b^2=2ab$ を満たすとする．xy 平面上で $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ によって媒介変数表示された楕円を C とする．点 $\mathrm{P}(b\cos t,\ a\sin t)$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と C 上の動点 $\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ に対し，$f(\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ とおく．

(1) $f'(\theta)=0$ であるとき，$\sin 2\theta=\sin(\theta-t)$ が成り立つことを示せ．

(2) $f'(\theta)=0$ となる θ を t を用いて表せ．

(3) $f'(\theta)=0$ となる θ がちょうど3つとなる t の値を求めよ．

(4) t を(3)で求めた値とする．このとき，$f'(\theta)=0$ となる各 θ に対応する C 上の3点を頂点とする三角形の面積を a, b を用いて表せ．

(1) $f(\theta)=(b\cos t-a\cos\theta)^2+(a\sin t-b\sin\theta)^2$

$=b^2\cos^2 t+a^2\cos^2\theta-2ab\cos t\cos\theta+a^2\sin^2 t+b^2\sin^2\theta-2ab\sin t\sin\theta$

$\therefore f'(\theta)=-2a^2\sin\theta\cos\theta+2ab\cos t\sin\theta+2b^2\sin\theta\cos\theta-2ab\sin t\cos\theta$

$=-2(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta+2ab(\sin\theta\cos t-\cos\theta\sin t)$

$=-(a^2-b^2)\sin 2\theta+2ab\sin(\theta-t)$

$=-2ab\sin 2\theta+2ab\sin(\theta-t)$　　$(\because a^2-b^2=2ab$ より$)$

$\therefore f'(\theta)=0$ のとき，$-2ab\{\sin 2\theta-\sin(\theta-t)\}=0$

$a>b>0$ より，$\sin 2\theta=\sin(\theta-t)$ ■

(2) 和・積の公式より，$\sin 2\theta-\sin(\theta-t)=2\cos\dfrac{3\theta-t}{2}\sin\dfrac{\theta+t}{2}$

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{3\theta-t}{2}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{2}$，$\dfrac{\theta+t}{2}=\pi$，

$\therefore\ \underline{\theta=\dfrac{\pi+t}{3},\ \dfrac{3\pi+t}{3},\ \dfrac{5\pi+t}{3},\ 2\pi-t}$ //

(3) $\dfrac{\pi+t}{3}<\dfrac{3\pi+t}{3}<\dfrac{5\pi+t}{3}$ より，$f'(\theta)=0$ となる θ がちょうど3つとなるのは，

$2\pi-t=\dfrac{\pi+t}{3}$ または $2\pi-t=\dfrac{3\pi+t}{3}$ または $2\pi-t=\dfrac{5\pi+t}{3}$

$\therefore t=\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{\pi}{4}$　　$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ より $\underline{t=\dfrac{\pi}{4}}$ //

2枚目につづく

埼玉大学

2014年 理学部 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 実数 a, b は $a > b > 0$ および $a^2 - b^2 = 2ab$ を満たすとする．xy 平面上で $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ によって媒介変数表示された楕円を C とする．点 $\mathrm{P}(b\cos t,\ a\sin t)$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と C 上の動点 $\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ に対し，$f(\theta) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ とおく．

(1) $f'(\theta) = 0$ であるとき，$\sin 2\theta = \sin(\theta - t)$ が成り立つことを示せ．

(2) $f'(\theta) = 0$ となる θ を t を用いて表せ．

(3) $f'(\theta) = 0$ となる θ がちょうど3つとなる t の値を求めよ．

(4) t を(3)で求めた値とする．このとき，$f'(\theta) = 0$ となる各 θ に対応する C 上の3点を頂点とする三角形の面積を a, b を用いて表せ．

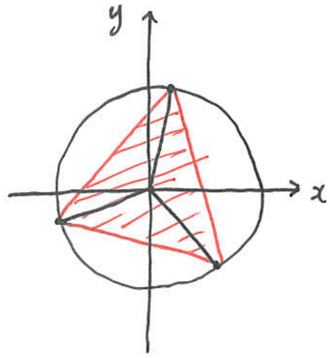
(4) $t = \frac{\pi}{4}$ のとき．$f'(\theta) = 0$ となるのは $\theta = \frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

これに対応する C 上の3点はそれぞれ

$(a\cos 75^\circ,\ b\sin 75^\circ)$，$(a\cos 195^\circ,\ b\sin 195^\circ)$，$(a\cos 315^\circ,\ b\sin 315^\circ)$

この C を x 軸方向に $\frac{1}{a}$，y 軸方向に $\frac{1}{b}$ に縮めたものは単位円になり

そのとき，の3点は正三角形をなす．



$\therefore$ 正三角形の面積は．$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 120^\circ \times 3$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$

元に戻すと面積は．ab 倍されるので

$\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}ab}$ //