

2014年 理工学部 第5問

5 以下の , , には三角関数は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ のみを用いて記入し, には x の式, には y の式を記入すること.

座標平面上の2点 $(1, 0)$, $(0, 1)$ を結ぶ曲線 C が媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されているとする. いま, 関数 $f(\theta)$, $g(\theta)$ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で連続, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で微分可能かつ $f'(\theta) \neq 0$ であるとする. また $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, 点 $(f(\theta), g(\theta))$ における曲線 C の接線の傾きが $-\tan\theta$ であり, この接線から x 軸, y 軸で切り取られる線分の長さがつねに一定で1であるとする.

まず, この曲線 C の方程式を求めたい. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, 曲線 C 上の点 $(f(\theta), g(\theta))$ における接線を $y = -(\tan\theta)x + h(\theta)$ と表すと $h(\theta) = \text{ト}$ となる. この接線の傾きが $\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}$ となることより, $f(\theta) = \text{ナ}$, $g(\theta) = \text{ニ}$ となる. したがって, 曲線 C を x, y の方程式で表すと

$$\text{ヌ} + \text{ネ} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

となる.

次に, 点 $(f(\theta), g(\theta))$ における曲線 C の法線を $\ell(\theta)$ とする. $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ のとき $\ell(\theta)$ と $\ell\left(\frac{\pi}{4}\right)$ との交点の x 座標を $X(\theta)$ とすると, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} X(\theta) = \text{フ}$ となる.

また, 曲線 C と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積は である.