

2012年工・情報・環境学部(A)第4問

増田

4 関数 $f(x) = x^3 + (a-2)x^2 + 3x$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は定数とする。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
 (2) $f(x)$ が極値をもつとき、 a の値の範囲を求めよ。
 (3) $f(x)$ が $x = -a$ で極値をもつとき、 a の値を求めよ。さらに、このときの極大値を求めよ。

$$(1) f'(x) = 3x^2 + 2(a-2)x + 3$$

- (2) $f(x)$ が極値をもつには、 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもてばよい。
 二次方程式 $3x^2 + 2(a-2)x + 3 = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D/4 &= (a-2)^2 - 3 \times 3 \\ &= a^2 - 4a - 5 \\ &= (a+1)(a-5) \end{aligned}$$

$$D/4 > 0 \text{ となる範囲は } a < -1, 5 < a$$

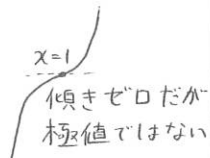
- (3) $f'(-a) = 0$ より、

$$\begin{aligned} 3(-a)^2 + 2(a-2)(-a) + 3 &= 0 \\ 3a^2 - 2a(a-2) + 3 &= 0 \\ a^2 + 4a + 3 &= 0 \\ (a+1)(a+3) &= 0 \\ \therefore a &= -1, -3 \end{aligned}$$

$a = -1$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\ &= 3(x-1)^2 \end{aligned}$$

このときグラフは
 右図のようになり、
 極値をもたない。

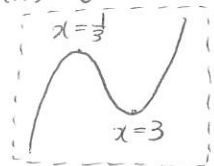
 $x=1$
 傾きゼロだが
 極値ではない

$a = -3$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 10x + 3 \\ &= (x-3)(3x-1) \end{aligned}$$

$$x=3, \frac{1}{3} \text{ のとき } f'(x) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$



$$= \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + 1$$

$$= \frac{13}{27}$$

$$a = -3 \text{ で、このとき極大値は } \frac{13}{27}$$