2012 年 医学部 第 2 問

$\boxed{2}$ C_1 を中心 $(0,\ 0)$，半径 1 の円とし，C_2 を中心 $(0,\ 0)$，半径 $r>1$ の円とする．$ad-bc>0$ を満たす行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換により円 C_1 が円 C_2 に移るとする．次の問いに答えよ．

(1) $a^2+c^2=b^2+d^2=r^2$，$ab+cd=0$ が成り立つことを示せ．

(2) $a=r\cos\theta$，$c=r\sin\theta$ (θは実数) とおくとき，b，d を r，θ を用いて表せ．

(3) $B=\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．また，C_1 に外接し，C_2 に内接する 8 個の相異なる円 S_1，S_2，$\cdots$，S_8 が次の 3 条件 (ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ) を満たしているとする．このとき，r を求めよ．

(ⅰ) 行列 B で表される 1 次変換により S_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ は S_{i+1} に，S_8 は S_1 に移る．

(ⅱ) S_{i+1} $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ は S_i に外接し，S_8 は S_1 にも外接する．

(ⅲ) S_1 は S_3，S_4，$\cdots$，S_7 と交わらない．