熊本大学

2015年 医学部（医学科） 第1問

$\boxed{1}$ △ABCの3辺の長さをBC $= a$，AC $= b$，AB $= c$ とし，条件

$$a + b + c = 1, \quad 9ab = 1$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

(1) a の値の範囲を求めよ．

(2) $\theta = \angle C$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ．

(1) $b = \dfrac{1}{9a}$，$c = 1 - a - b = 1 - a - \dfrac{1}{9a}$

三角形の成立条件より，a, b, c は正で

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases} \iff \begin{cases} a + \dfrac{1}{9a} > 1 - a - \dfrac{1}{9a} \\ \dfrac{1}{9a} + 1 - a - \dfrac{1}{9a} > a \\ 1 - a - \dfrac{1}{9a} + a > \dfrac{1}{9a} \end{cases} \iff \begin{cases} 18a^2 - 9a + 2 > 0 \quad \cdots ① \\ a < \dfrac{1}{2} \quad \cdots ② \\ a > \dfrac{2}{9} \quad \cdots ③ \end{cases}$$

ここで，①は，

$18\left(a - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} > 0$ なので，すべての実数 a で成り立つ

∴ ②，③より，$\underline{\dfrac{2}{9} < a < \dfrac{1}{2}}$ //

(2) 余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{a^2 + \frac{1}{81a^2} - \left(1 - a - \frac{1}{9a}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{18a^2 - 11a + 2}{2a}$$

$$= 9a + \frac{1}{a} - \frac{11}{2}$$

∴ $f(a) = 9a + \dfrac{1}{a} - \dfrac{11}{2}$ とおくと，$f'(a) = 9 - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{9a^2 - 1}{a^2}$

a	$\left(\frac{2}{9}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	(1)	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	(1)

右の増減表より，$\underline{\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta < 1}$ //

数理 石井K