

2012年第2問

2 平面上のベクトル \vec{a} , \vec{b} が $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$ と $|2\vec{a} - \vec{b}| = 2$ を満たしている。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $|\vec{a}| = k$ とするとき、 $|\vec{b}|$ と $\vec{a} \cdot \vec{b}$ をそれぞれ k を用いて表せ。
 (2) \vec{a} と \vec{b} のなす角が $\frac{\pi}{4}$ であるとき、 $|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ。

$$(1) |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5} \text{ より, } |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = 2 \text{ より, } 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より, } 3|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$$

$$|\vec{a}| = k \text{ であるから, } \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}} \quad //$$

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \text{ より, } -2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 6$$

$$|\vec{a}| = k \text{ であるから, } |\vec{b}|^2 = 2k^2 + 6 \quad \therefore \underline{|\vec{b}| = \sqrt{2k^2 + 6}} \quad //$$

$$(2) \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \text{ が成り立つので (1) の結果を代入して,}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}}{k\sqrt{2k^2 + 6}} \quad \therefore 2k\sqrt{k^2 + 3} = 3k^2 + 1$$

$$\text{両辺とも正なので 2 乗して, } 4k^2(k^2 + 3) = 9k^4 + 6k^2 + 1$$

$$\therefore 5k^4 - 6k^2 + 1 = 0$$

$$\therefore (5k^2 - 1)(k^2 - 1) = 0$$

$$\therefore k = |\vec{a}| > 0 \text{ より, } k = \frac{\sqrt{5}}{5}, 1$$

$$\text{よって } \underline{|\vec{a}| = \frac{\sqrt{5}}{5}, |\vec{b}| = \frac{4\sqrt{10}}{5} \text{ または, } |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2\sqrt{2}} \quad //$$