

2012年工学部第3問

3  $a, b$  は定数で  $a \neq 0$  とする. 自然数  $n$  に対して, 整式  $(ax + b)^n$  を  $x^2 + 1$  で割った余りを  $a_n x + b_n$  と表し,

$$I_n = \int_0^1 \frac{(ax + b)^n}{x^2 + 1} dx$$

とおく.

(1) 行列  $A$  は, すべての  $n$  に対して,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

を満たす. 行列  $A$  を求めよ.

(2) (1) で求めた行列  $A$  に対し,

$$A^2 + pA + qE = O$$

となる定数  $p, q$  を  $a, b$  を用いて表せ. ただし,  $E$  は単位行列,  $O$  は零行列である.

(3) (2) で求めた  $p, q$  に対し, 定積分

$$I_{n+2} + pI_{n+1} + qI_n$$

を求めよ.

(4)  $a = 1, b = -1$  のとき  $I_5$  を求めよ.