0002060459397999

# 日本女子大学

2015年 理学部 第2問

数理 石#K

$\boxed{2}$ 実数 $x$ が $x \geqq 0$ の範囲の値をとるとき，関数

$$f(x)=\int_0^x (t^2-4t+2)e^{-t}\,dt$$

の最小値とそのときの $x$ の値を求めよ．

$f'(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$x=2\pm\sqrt{2}$

増減表は右のようになる

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $2-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $2+\sqrt{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |
| | | | 極大 | | 極小 | |

$f(0)=0$,

$\alpha=2+\sqrt{2}$ とおくと，

$$f(\alpha)=\int_0^\alpha (t^2-4t+2)(-e^{-t})'\,dt$$

$$=\Big[-(t^2-4t+2)e^{-t}\Big]_0^\alpha-\int_0^\alpha (2t-4)\cdot(e^{-t})'\,dt$$

$$=\Big[-(t^2-4t+2)e^{-t}\Big]_0^\alpha-\Big[(2t-4)\cdot e^{-t}\Big]_0^\alpha+\int_0^\alpha 2e^{-t}\,dt$$

$$=-(\alpha^2-4\alpha+2)e^{-\alpha}+2-(2\alpha-4)\cdot e^{-\alpha}-4+2\Big[-e^{-t}\Big]_0^\alpha$$

ここで，$f'(\alpha)=0$ より，$\alpha^2-4\alpha+2=0$

$$\therefore\ f(\alpha)=2-(4+2\sqrt{2}-4)\cdot e^{-(2+\sqrt{2})}-4-2e^{-(2+\sqrt{2})}+2$$

$$=-2\sqrt{2}e^{-(2+\sqrt{2})}-2e^{-(2+\sqrt{2})}$$

$$=-2(1+\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}\quad(<0)$$

$\therefore$ 最小値は $-2(1+\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$ （$x=2+\sqrt{2}$ のとき） //