日本女子大学

2015年 理学部 第4問

数理 石井K

4 nを自然数とする．白玉4個と赤玉8個が入っている袋から，玉を1個取り出し，色を見てからもとにもどす試行をn回繰り返すとき，白玉が偶数回出る確率をp_nとする．ただし，0は偶数と考える．

(1) p_{n+1}をp_nで表せ．

(2) 数列$\{p_n\}$の一般項を求めよ．

(3) 極限$\lim_{n\to\infty} p_n$を求めよ．

(1) $n+1$回取り出して，白玉が偶数回出るのは，

$$\begin{cases} n\text{回取り出して，白玉が偶数回} \longrightarrow n+1\text{回目が赤玉} \\ 〃 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{奇数回} \longrightarrow n+1\text{回目が白玉} \end{cases}$$

のいずれかなので，

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{8}{12} + (1-p_n)\cdot\frac{4}{12} \qquad \therefore \underline{p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}}$$ //

(2) $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 数列$\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$は初項$p_1 - \frac{1}{2}$，公比$\frac{1}{3}$の等比数列で，

$p_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$であるから，$p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$$\therefore\ p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \therefore \underline{p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}}$$ //

(3) (2)より，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}$$ //