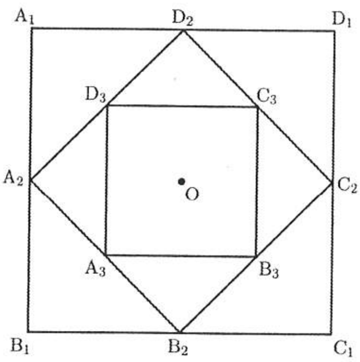
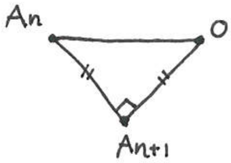
2013 年 商学部 第 4 問

$\boxed{4}$ 正方形 $A_1B_1C_1D_1$ が下図のように与えられている．正方形 $A_2B_2C_2D_2$，正方形 $A_3B_3C_3D_3$，$\cdots$，正方形 $A_nB_nC_nD_n$，正方形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$，$\cdots$ を順に考える．ただし，A_{n+1}，B_{n+1}，C_{n+1}，D_{n+1} はそれぞれ順に A_nB_n，B_nC_n，C_nD_n，D_nA_n の中点，O は A_1C_1 の中点である．正方形 $A_nB_nC_nD_n$ の面積を S_n とする．その時，$\dfrac{S_n}{S_1}$ が初めて $\dfrac{1}{100}$ 以下となる n の値とその時の $\angle A_1OA_n$ を求めよ．$\log_{10}2 = 0.301$ とする．



$A_nB_n = l_n$ とおく $(n = 1, 2, \cdots)$



$OA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} OA_n$ と $OA_n = \frac{1}{\sqrt{2}} A_nB_n = \frac{1}{\sqrt{2}} l_n$ より

$\frac{1}{\sqrt{2}} l_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} l_n \quad \therefore l_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} l_n$

$\therefore \{l_n\}$ は初項 l_1，公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列より $l_n = l_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

$\therefore S_n = l_n^2 = l_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = S_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \frac{S_n}{S_1} \leqq \frac{1}{100} \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leqq \frac{1}{100}$ 両辺対数をとって

$$(n-1)\log_{10}\frac{1}{2} \leqq -2$$

$$\therefore (1-n) \times 0.3010 \leqq -2 \quad \therefore \underline{n = 8}$$

点列 $\{A_n\}$ は O のまわりに反時計回りに $45°$ ずつ回転するので

$\underline{\angle A_1OA_8 = 45°}$