0001059360498999

広島大学

2013年 文系 第4問

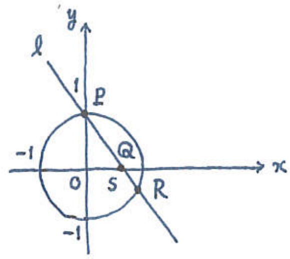
数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面上で，原点Oを中心とする半径1の円をCとし，2点P(0, 1)，Q(s, 0)を考える．2点P，Qを通る直線をℓとし，ℓとCの交点のうちPではないものをRとする．次の問いに答えよ．

(1) 点Rの座標をsを用いて表せ．

(2) x座標とy座標がともに有理数である点を有理点という．sが有理数のとき，Rは有理点であることを示せ．

(1) (i) $s=0$ のとき ℓ: y軸 となり，R$(0,-1)$



(ii) $s \neq 0$ のとき，

$\ell: y=\dfrac{0-1}{s-0}x+1$ $\quad\therefore\ \ell: y=-\dfrac{1}{s}x+1$

$x^2+y^2=1$ に代入して， $x^2+\dfrac{1}{s^2}x^2-\dfrac{2}{s}x+1=1$

$\therefore\ x\left\{(s^2+1)x-2s\right\}=0$ $\quad\therefore\ x=0,\ \dfrac{2s}{s^2+1}$

R≠P より， $\underline{R\left(\dfrac{2s}{s^2+1},\ \dfrac{s^2-1}{s^2+1}\right)}$ //

(2) $s=\dfrac{q}{p}$ (p, qは整数) とおくと，

$\dfrac{2s}{s^2+1}=\dfrac{2\cdot\frac{q}{p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^2+1}=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ ， $\dfrac{s^2-1}{s^2+1}=\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^2-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^2+1}=\dfrac{q^2-p^2}{p^2+q^2}$

ここで， p^2+q^2， $2pq$， q^2-p^2 はすべて整数なので

点Rのx座標，y座標はともに有理数

よって，Rは有理点 ▨