

2014年 第2問

 数理  
石井K

 2 2次正方行列  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  についての条件
(\*)  $a = d$  かつ  $b = -c$ 
 を考える. (\*) を満たす  $M$  に対して, 実数  $f(M)$  を  $f(M) = \sqrt{a^2 + b^2}$  と定める. 以下の問いに答えなさい.

- (1) 2次正方行列  $A, B$  がともに (\*) を満たすならば, 積  $AB$  も (\*) を満たすことを証明しなさい.
- (2) 2次正方行列  $A, B$  がともに (\*) を満たすならば,  $f(AB) = f(A)f(B)$  が成り立つことを証明しなさい.
- (3)  $A = 16 \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$  に対して  $f(A^n)$  が十進法で10けた以上となる自然数  $n$  のうち最小のものを求めなさい. ただし, 本問においては  $\log_{10} 2 = 0.301$  とする.

$$(1) A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} z & -w \\ w & z \end{pmatrix} \text{ とおけるので}$$

$$AB = \begin{pmatrix} xz - yw & -xw - yz \\ yz + xw & -yw + xz \end{pmatrix} \quad \therefore (*) \text{ を満たしている} \quad \square$$

$$(2) (1) \text{ より } f(AB) = \sqrt{(xz - yw)^2 + (-xw - yz)^2} = \sqrt{x^2z^2 + y^2w^2 + x^2w^2 + y^2z^2}$$

$$f(A)f(B) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + w^2} = \sqrt{x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2}$$

$$\therefore f(AB) = f(A)f(B) \quad \square$$

$$(3) A = 32 \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \text{ より } A^n = 32^n \begin{pmatrix} \cos(60^\circ n) & -\sin(60^\circ n) \\ \sin(60^\circ n) & \cos(60^\circ n) \end{pmatrix}$$

$$\therefore f(A^n) = \sqrt{32^{2n} \{ \cos^2(60^\circ n) + \sin^2(60^\circ n) \}} = 32^n$$

$$\therefore 32^n \geq 10^9 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{5n} \geq 10^9$$

$$\therefore 5n \log_{10} 2 \geq 9$$

$$1.505n \geq 9$$

$$\therefore n \geq 5.98 \dots$$

$$\therefore \underline{\underline{n = 6}}$$