2011年 第5問

$\boxed{5}$ 実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．座標平面上の2点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(u,\ v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき，行列 A により点Pは点Qに移るという．

点 $(1,\ 3)$ は行列 A により点 $(10,\ 10)$ に移り，さらに等式

$$A^2-7A+10E=O$$

が成り立つものとする．ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A により点 $(10,\ 10)$ が移る点の座標を求めよ．

(2) 実数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ．

(3) 次の条件 $(*)$ を満たす直線 ℓ の方程式を求めよ．

$(*)$ 直線 ℓ 上のすべての点が行列 A により ℓ 上の点に移る．