

2013年工・情報・環境学部(A)第3問

 数理
石井K

3 a, b を定数とする. 3次関数 $f(x) = ax^2(x-3) + b$ の区間 $0 \leq x \leq 3$ における最大値が1で最小値が-1のとき, a, b の値を求めよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 - 6ax \\ &= 3ax(x-2) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = 0 \text{ とする } x \text{ は } x=0, 2$$

(i) $a > 0$ のとき 増減表は右のようになる.

$$\therefore \text{最大値は } b = 1$$

$$\text{最小値は } -4a + b = -1$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = 1$$

(ii) $a < 0$ のとき 増減表は右のようになる

$$\therefore \text{最大値は } -4a + b = 1$$

$$\text{最小値は } b = -1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = -1$$

(i), (ii) より.

$$(a, b) = \left(\pm \frac{1}{2}, \pm 1 \right) \text{ (複号同順)}$$

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$	0	-	0	+	+
$f(x)$	b	↓	$-4a + b$	↑	b

(i) $a > 0$ のとき

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$	0	+	0	-	-
$f(x)$	b	↑	$-4a + b$	↓	b

(ii) $a < 0$ のとき.