

2013年文系第4問

1枚目/2枚

- 4 1次関数 $f(x) = px + q$ に対して、 x の係数 p と定数項 q を成分にもつベクトル (p, q) を \vec{f} とする。つまり、 $\vec{f} = (p, q)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (kx + l)(mx + n) dx$$

を求めるよ。ただし、 k, l, m, n は定数である。(2) 2つの1次関数 $g(x)$ と $h(x)$ に対して、等式

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} g(x)h(x) dx = \vec{g} \cdot \vec{h}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\vec{g} \cdot \vec{h}$ はベクトル \vec{g}, \vec{h} の内積を表す。

(3) 等式

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x+1)^2 dx \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \{g(x)\}^2 dx = \left\{ \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x+1)g(x) dx \right\}^2$$

を満たし、 $g(0) = -2$ であるような1次関数 $g(x)$ を求めるよ。

$$\begin{aligned} (1) \text{ (等式)} &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \underbrace{kmx^2}_{\text{偶関数}} + \underbrace{(kn+lm)x}_{\text{奇関数}} + \underbrace{ln}_{\text{偶関数}} dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \underbrace{kmx^2}_{\text{偶関数}} + \underbrace{ln}_{\text{偶関数}} dx \\ &= 2 \left[\frac{km}{3}x^3 + ln x \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2(\sqrt{3}km + \sqrt{3}ln) \\ &= \underline{2\sqrt{3}(km+ln)} \end{aligned}$$

(2) $g(x) = rx+s, h(x) = tx+u$ すると、(1)より、

$$(左辺) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} (rt+su) = rt+su$$

$$\vec{g} = (r, s), \vec{h} = (t, u) \text{ より}$$

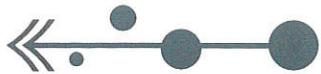
$$(右辺) = rt+su$$

∴ 与えられた等式は成り立つ ■

ポイント

$$\int_{-a}^a (\text{偶}) + (\text{奇}) dx = 2 \int_0^a (\text{偶}) dx$$

これで速く計算できる



2013年文系第4問

2枚目/2枚

- 4 1次関数 $f(x) = px + q$ に対して、 x の係数 p と定数項 q を成分にもつベクトル (p, q) を \vec{f} とする。つまり、 $\vec{f} = (p, q)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (kx + l)(mx + n) dx$$

を求めよ。ただし、 k, l, m, n は定数である。(2) 2つの1次関数 $g(x)$ と $h(x)$ に対して、等式

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} g(x)h(x) dx = \vec{g} \cdot \vec{h}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\vec{g} \cdot \vec{h}$ はベクトル \vec{g}, \vec{h} の内積を表す。

(3) 等式

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x+1)^2 dx \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \{g(x)\}^2 dx = \left\{ \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x+1)g(x) dx \right\}^2$$

を満たし、 $g(0) = -2$ であるような1次関数 $g(x)$ を求めよ。(3) $g(0) = -2$ より、 $g(x) = rx - 2$ とおけるまた、 $h(x) = 2x+1$ とすると、(2)より、

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x+1)^2 dx = 2\sqrt{3} (2, 1) \cdot (2, 1) = 2\sqrt{3} \cdot (2^2 + 1^2) = 10\sqrt{3}$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \{g(x)\}^2 dx = 2\sqrt{3} (r, -2) \cdot (r, -2) = 2\sqrt{3} (r^2 + 4)$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x+1)g(x) dx = 2\sqrt{3} (2, 1) \cdot (r, -2) = 2\sqrt{3} (2r - 2) = 4\sqrt{3} (r - 1)$$

これらを等式に代入して、

$$10\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} (r^2 + 4) = \{4\sqrt{3} (r - 1)\}^2$$

$$\therefore 60(r^2 + 4) = 48(r - 1)^2$$

$$\therefore r^2 + 8r + 16 = 0$$

$$(r + 4)^2 = 0$$

$$\therefore r = -4$$

$$\therefore \underline{g(x) = -4x - 2}$$