新潟大学

2013年 文系 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 1次関数 $f(x)=px+q$ に対して，x の係数 p と定数項 q を成分にもつベクトル $(p,\ q)$ を $\overrightarrow{f}$ とする．つまり，$\overrightarrow{f}=(p,\ q)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx+l)(mx+n)\,dx$$

を求めよ．ただし，k，l，m，n は定数である．

(2) 2つの1次関数 $g(x)$ と $h(x)$ に対して，等式

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}g(x)h(x)\,dx=\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{h}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{h}$ はベクトル $\overrightarrow{g}$，$\overrightarrow{h}$ の内積を表す．

(3) 等式

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2\,dx\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2\,dx=\left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)\,dx\right\}^2$$

を満たし，$g(0)=-2$ であるような1次関数 $g(x)$ を求めよ．

(1) (与式) $= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \underbrace{kmx^2}_{偶関数} + \underbrace{(kn+lm)x}_{奇関数} + \underbrace{ln}_{偶関数}\,dx$

ポイント

$$\int_{-a}^{a} 偶 + 奇\,dx = 2\int_0^a 偶\,dx$$

これで速く計算できる

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} kmx^2 + ln\,dx$$

$$= 2\left[\frac{km}{3}x^3 + lnx\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\left(\sqrt{3}km + \sqrt{3}ln\right)$$

$$= \underline{2\sqrt{3}(km+ln)}\ //$$

(2) $g(x)=rx+s$，$h(x)=tx+u$ とすると，(1)より，

(左辺) $= \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}(rt+su) = rt+su$

$\overrightarrow{g}=(r,s)$，$\overrightarrow{h}=(t,u)$ より

(右辺) $= rt+su$

∴ 与えられた等式は成り立つ ▨

新潟大学

2013年 文系 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 1次関数 $f(x)=px+q$ に対して，x の係数 p と定数項 q を成分にもつベクトル $(p,\ q)$ を $\vec{f}$ とする．つまり，$\vec{f}=(p,\ q)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx+l)(mx+n)\,dx$$

を求めよ．ただし，$k,\ l,\ m,\ n$ は定数である．

(2) 2つの1次関数 $g(x)$ と $h(x)$ に対して，等式

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}g(x)h(x)\,dx=\vec{g}\cdot\vec{h}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\vec{g}\cdot\vec{h}$ はベクトル $\vec{g},\ \vec{h}$ の内積を表す．

(3) 等式

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2\,dx\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2\,dx=\left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)\,dx\right\}^2$$

を満たし，$g(0)=-2$ であるような1次関数 $g(x)$ を求めよ．

(3) $g(0)=-2$ より，$g(x)=rx-2$ とおける

また，$h(x)=2x+1$ とすると，(2)より，

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2\,dx=2\sqrt{3}\,(2,1)\cdot(2,1)=2\sqrt{3}\cdot(2^2+1^2)=10\sqrt{3}$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2\,dx=2\sqrt{3}\,(r,-2)\cdot(r,-2)=2\sqrt{3}\,(r^2+4)$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)\,dx=2\sqrt{3}\,(2,1)\cdot(r,-2)=2\sqrt{3}\,(2r-2)=4\sqrt{3}\,(r-1)$$

これらを与式に代入して，

$$10\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\,(r^2+4)=\{4\sqrt{3}\,(r-1)\}^2$$

$$\therefore\ 60(r^2+4)=48(r-1)^2$$

$$\therefore\ r^2+8r+16=0$$

$$(r+4)^2=0$$

$$\therefore\ r=-4$$

$$\therefore\ \underline{g(x)=-4x-2}\ //$$