新潟大学

2019年 理系 第4問

$\boxed{4}$ 半径がそれぞれ a, b の円を C_a, C_b とする．C_a 上に点 A，C_b 上に点 B をとる．はじめに 2 点 A，B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる．ここで，点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする．次の問いに答えよ．ただし，必要があれば，自然数 m, n の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表せ．

(1) a, b を自然数とする．C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，a, b を用いて表せ．

(2) a, b を正の有理数とし，$a = \dfrac{p}{q}$, $b = \dfrac{s}{t}$ とおく．ここで p, q は互いに素な自然数とし，s, t も互いに素な自然数とする．C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，p, q, s, t を用いて表せ．

(3) a, b は互いに素な自然数とする．$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする．このとき $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ．