0000409630959999

新潟大学

2012年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ xy 平面上に放物線 $C: y=-x^2$ がある．P$(a,\ b)$ を C 上の点とする．放物線 $D: y=x^2+px+q$ は点Pを通り，点Pにおける C の接線と D の接線は一致している．次の問いに答えよ．

(1) $b,\ p,\ q$ をそれぞれ a で表せ．

(2) $a=1$ のとき，放物線 C と D および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 点P$(a,\ b)$が放物線 C 上を動くとき，放物線 D の頂点の軌跡を求めよ．

(1) 点Pが C上にあることより，$\underline{b=-a^2}$ //

また，Cにおいて，$y'=-2x$ ∴点Pにおける C の接線の傾きは $-2a$

Dにおいて，$y'=2x+p$ ∴点Pにおける D の接線の傾きは，$2a+p$

これらが等しいので，$-2a=2a+p$ ∴ $\underline{p=-4a}$ //

点Pが D上にあることより．$b=a^2+pa+q$

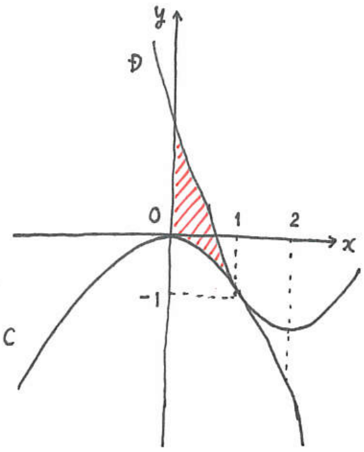
∴ $-a^2=a^2-4a^2+q$ ∴ $\underline{q=2a^2}$ //

(2) (1)より，$a=1$ のとき，

$b=-1,\ p=-4,\ q=2$

∴ $P(1,-1)$，$D: y=x^2-4x+2$

$=(x-2)^2-2$



∴右のグラフより．

$$S=\int_0^1 x^2-4x+2-(-x^2)\,dx$$

$$=2\int_0^1 x^2-2x+1\,dx$$

$$=2\int_0^1 (x-1)^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1$$

$$=\underline{\frac{2}{3}}\ //$$

(3) $D: y=x^2-4ax+2a^2$

$=(x-2a)^2-2a^2$

∴ Dの頂点は $(2a,-2a^2)$

頂点を (X,Y) とおくと．$X=2a,\ Y=-2a^2$

a を消去して．

$Y=-\frac{1}{2}X^2$

よって．Dの頂点は(の軌跡)放物線 $\underline{y=-\frac{1}{2}x^2}$ //