

2014年 文学部 第3問


 数理
石井K

3 座標平面上に、始点が原点で終点の y 座標が 1 に等しい 2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} がある. \vec{a} と \vec{b} のなす角度を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とするとき, 等式

$$\sin \theta = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

が成り立つことを示せ.

\vec{a} と \vec{b} の終点を ^{それぞれ} A, B として

$\triangle OAB$ の面積を S とする

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

であり, 一方

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}| \end{aligned}$$

と表せるから

$$\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}|$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad \square$$

これは $\vec{a} = \vec{b}$ のときも成り立っている

