0001980819108999

新潟大学

2015 年 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $f(x)=x^2-2x+2$ とする．放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を ℓ_1 とし，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{Q}(p+1,\ f(p+1))$ における接線を ℓ_2 とする．2 直線 ℓ_1，ℓ_2 の交点を R とする．ただし p は定数である．次の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ_1，ℓ_2 の方程式をそれぞれ p を用いて表せ．

(2) 交点 R の座標を p を用いて表せ．

(3) 放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 ℓ_1，ℓ_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $f'(x)=2x-2$ より．$\ell_1 : y=(2p-2)(x-p)+p^2-2p+2$

これを整理すると．$\underline{\ell_1 : y=2(p-1)x-p^2+2}$ //

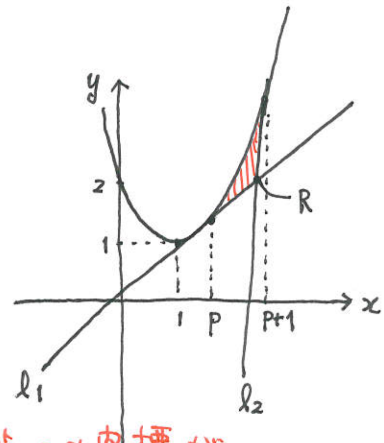
同様に，$\ell_2 : y=2p(x-(p+1))+(p+1)^2-2(p+1)+2$

整理すると．$\underline{\ell_2 : y=2px-p^2-2p+1}$ //

(2) (1) より．$2(p-1)x-p^2+2=2px-p^2-2p+1$ を解くと．

$x=p+\frac{1}{2}$　このとき ℓ_2 の式に代入すると $y=p^2-p+1$

$\therefore \underline{R\left(p+\frac{1}{2},\ p^2-p+1\right)}$ //



(3) 右のグラフより 求める面積を S とおくと．

$$S=\int_p^{p+\frac{1}{2}} x^2-2x+2-2(p-1)x+p^2-2\,dx$$

$$+\int_{p+\frac{1}{2}}^{p+1} x^2-2x+2-2px+p^2+2p-1\,dx$$

$$=\int_p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^2\,dx+\int_{p+\frac{1}{2}}^{p+1}\{x-(p+1)\}^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_p^{p+\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}\{x-(p+1)\}^3\right]_{p+\frac{1}{2}}^{p+1}$$

$$=\underline{\frac{1}{12}}$$ //

接点の x 座標が分かっているから
このように因数分解できる
ことが分かる.
まともに積分すると
計算が大変!