北九州市立大学

2013年第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 初項 $a_1=0$，漸化式 $a_{n+1}=a_n+2n-15$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考える．また，数列 $\{a_n\}$ の第1項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $a_n>0$ を満たす最小の n を求めよ．

(3) 数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $S_n>a_n$ を満たす最小の n を求めよ．

(5) 数列 $\{T_n\}$ の一般項を $T_n=S_n-n\cdot a_n$ によって定める．T_n が，ある数列 $\{b_n\}$ の第1項から第 n 項までの和となるとする．その数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_{n+1}-a_n=2n-15$ より

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-15) \quad (n\geqq 2)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-15(n-1)$$

$$=\underline{n^2-16n+15}_{\,//}$$ これは $n=1$ のときも成り立つ

(2) $a_n>0 \iff n^2-16n+15>0$

$\iff (n-15)(n-1)>0$

$n-1\geqq 0$ より $n>15$ ∴最小の n は $\underline{n=16}_{\,//}$

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-16k+15)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-16\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+15n$$

$$=\underline{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-43)}_{\,//}$$

(4) $S_n>a_n \iff \frac{1}{6}n(n-1)(2n-43)>(n-15)(n-1)$

$\iff \frac{1}{6}(n-1)\{n(2n-43)-6(n-15)\}>0$

$\iff \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n-45)>0$

∴ $n>\frac{45}{2}$ より 最小の n は $\underline{n=23}_{\,//}$

(5) $b_n=T_n-T_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ となるから．$b_n=S_n-n\cdot a_n-(S_{n-1}-(n-1)a_{n-1})$ $(n\geqq 2)$

よって．$b_n=a_n-n\cdot a_n+(n-1)a_{n-1}$ ∴ $\underline{b_n=-2n^2+19n-17}_{\,//}$

$b_1=T_1=0$ より $n=1$ のときも成り立つ