長岡技術科学大学

2014年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ Aを2次の正方行列とし，Oを2次の零行列，Eを2次の単位行列とする．$P=A-E$とおいたとき，$P^2=O$が成り立っているとする．下の問いに答えなさい．

(1) 等式$A^2=2P+E$と$A^3=3P+E$を示しなさい．

(2) 自然数nに対してA^nをPとEで表しなさい．

(3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$のとき，自然数$n$に対して$A^n$を求めなさい．

(1) $P=A-E$より．$A=P+E$ $\therefore A^2=P^2+2P+E$ $\therefore A^2=2P+E$ ▨

$A^3=A^2\cdot A=(2P+E)\cdot A=(2P+E)(P+E)=2P^2+3P+E$

$=3P+E$ ▨

(2) $A^n=nP+E$と推測し．数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$のときは$A^1=P+E$となり．これは$P=A-E$であり．

与えられた条件なので成り立つ．

(ii) $n=k$のとき．成り立つと仮定する．$A^k=kP+E$

$\therefore A^{k+1}=A\cdot A^k=kP(P+E)+A=kP^2+kP+(P+E)$

$\therefore A^{k+1}=(k+1)P+E$ となり $n=k+1$のときも成り立つ

(i)，(ii)よりすべての自然数nについて，$\underline{A^n=nP+E}$ が成り立つ ▨ //

(3) $P=A-E=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$とおくと．

$P^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\therefore$ (1)～(2)より．$A^n=nP+E$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix} n & n \\ -n & -n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}}$ //