新潟大学

2013年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 正の整数nに対して$a_n=\sqrt{1+n^2}-n$とおく．次の問いに答えよ．

(1) 不等式$\dfrac{1}{2n+1}<a_n<\dfrac{1}{2n}$が成り立つことを示せ．

(2) 不等式$a_n>a_{n+1}$が成り立つことを示せ．

(3) $a_n<0.03$となる最小の正の整数nを求めよ．

(1) $a_n=\dfrac{(\sqrt{1+n^2}-n)(\sqrt{1+n^2}+n)}{\sqrt{1+n^2}+n}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}$

ここで，$n>0$より，

$\sqrt{n^2}+n<\sqrt{1+n^2}+n<\sqrt{(n+1)^2}+n$

$\therefore\ 2n<\sqrt{1+n^2}+n<2n+1$

$\therefore\ \dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}<\dfrac{1}{2n}$

$\therefore\ \dfrac{1}{2n+1}<a_n<\dfrac{1}{2n}$ ▨

(2) (1)より，$\dfrac{1}{2n+1}<a_n<\dfrac{1}{2n}$，$\dfrac{1}{2n+3}<a_{n+1}<\dfrac{1}{2n+2}$

$\dfrac{1}{2n+1}>\dfrac{1}{2n+2}$ であるから，$\dfrac{1}{2n+3}<a_{n+1}<\dfrac{1}{2n+2}<\dfrac{1}{2n+1}<a_n<\dfrac{1}{2n}$

よって，$a_n>a_{n+1}$ が成り立つ ▨

(3) $a_n<0.03 \iff \sqrt{1+n^2}-n<0.03$

$\iff \sqrt{1+n^2}<n+0.03$

両辺とも正であるから，2乗して，$1+n^2<n^2+0.06n+0.0009$

$\therefore\ 0.06n>0.9991$

$n>\dfrac{99.91}{6}\fallingdotseq 16.665$

nは正の整数より，$\underline{n=17}$ //