0002195544087999

新潟大学

2016年 文系 第2問

数理 石井K

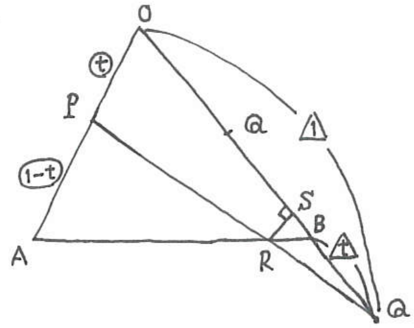
$\boxed{2}$ △OABにおいて，OA＝5，OB＝6，AB＝7とする．t を $0<t<1$ を満たす実数とする．辺OAを $t:(1-t)$ に内分する点をP，辺OBを $1:t$ に外分する点をQ，辺ABと線分PQの交点をRとする．点Rから直線OBへ下ろした垂線をRSとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OR}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{OS}$ を t，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) 線分OSの長さが4となる t の値を求めよ．



(1) 余弦定理より，$\cos\angle AOB=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB$

$=5\cdot6\cdot\dfrac{1}{5}$

$=\underline{6}$ //

(2) メネラウスの定理より，$\dfrac{1-t}{t}\cdot\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{BR}{RA}=1$

$\therefore\ RA:BR=1-t:t^2$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OR}=\dfrac{t^2}{1-t+t^2}\vec{a}+\dfrac{1-t}{1-t+t^2}\vec{b}}$ //

(3) $\overrightarrow{OS}=k\vec{b}$ とおくと，

$\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OS}$

$=\dfrac{t^2}{1-t+t^2}\vec{a}+\left(\dfrac{1-t}{1-t+t^2}-k\right)\vec{b}$

$\overrightarrow{SR}\perp\vec{b}$ より，$\overrightarrow{SR}\cdot\vec{b}=0$

$\overrightarrow{SR}\cdot\vec{b}=\dfrac{t^2}{1-t+t^2}\cdot6+\left(\dfrac{1-t}{1-t+t^2}-k\right)\cdot36$

$\therefore\ t^2+6\{1-t-k(1-t+t^2)\}=0$　　$t^2-t+1=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ であるから

$\therefore\ k=\dfrac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}$　　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OS}=\dfrac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}\vec{b}}$ //

$0<t<1$ において，$t^2-6t+6>0$，$t^2-t+1>0$ なので $|\overrightarrow{OS}|=\dfrac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}|\vec{b}|$

$\therefore\ 4=\dfrac{t^2-6t+6}{t^2-t+1}$　　$\Longleftrightarrow\ 3t^2+2t-2=0$

$\therefore\ t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$　　$0<t<1$ より $\underline{t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}}$ //