



2018年理系第5問

5 自然数  $n$  に対して、関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x)$$

と定める。ただし、 $(-x)^{3k}$  は  $k=0$  のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1)  $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1}$  を示せ。

(2)  $\left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)}$  を示せ。

(3) 無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right)$$

の和を求めよ。