0000497812059999

お茶の水女子大学

2011 年 化学・情報科学科（共通問題） 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ x の多項式 $f(x)$ は

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = 0, \quad f(1) = f(-1) = 0$$

を満たしているとする．

(1) このとき $\int_{-1}^{1} x^2 f'(x)\,dx = 0$ を示せ．

(2) さらに多項式 $f(x)$ は 3 次以下で $\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx = 1$ を満たしているとする．このような $f(x)$ を求めよ．

(2) のポイント

$\int_{-1}^{1}$ 奇関数 $dx = 0$, $\int_{-1}^{1}$ 偶関数 $dx = 2\int_{0}^{1}$ 偶関数 dx

(1) 部分積分により．

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{2}\right)' f(x)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}f(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}f'(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}f(-1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 f'(x)\,dx$$

$\therefore$ $f(1) = f(-1) = 0$, $\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = 0$ より, $\int_{-1}^{1} x^2 f'(x)\,dx = 0$ ▨

(2) $f(1) = f(-1) = 0$ をみたす 3次以下の $f(x)$ は $f(x) = (ax+b)(x^2-1)$ と表せるので

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{1} ax^4 + bx^3 - ax^2 - bx\,dx = 2\int_{0}^{1} ax^4 - ax^2\,dx = 2\left[\frac{ax^5}{5} - \frac{ax^3}{3}\right]_{0}^{1}$$

$\therefore$ $\frac{a}{5} - \frac{a}{3} = 0$ より $a = 0$

また，このとき．$\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx = \int_{-1}^{1} b(x^2-1)e^x\,dx$

$$= b\int_{-1}^{1} (x^2-1)(e^x)'\,dx$$
$$= b\left[(x^2-1)e^x\right]_{-1}^{1} - b\int_{-1}^{1} 2xe^x\,dx$$
$$= -2b\int_{-1}^{1} x(e^x)'\,dx$$
$$= -2b\left[xe^x\right]_{-1}^{1} + 2b\int_{-1}^{1} e^x\,dx$$
$$= -2b\left(e + \frac{1}{e}\right) + 2b\left(e - \frac{1}{e}\right)$$
$$= -\frac{4}{e}b$$

$\therefore$ $b = -\frac{e}{4}$ $\quad$ $\therefore$ $\underline{f(x) = -\frac{e}{4}(x^2-1)}$ //