

2012年 第1問


 数理
石井K

1 次の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。(i) $(a+b)(b+c)(c+a)$ の値を求めよ。(ii) $\frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{a^7+b^7+c^7}$ が成り立つことを示せ。(2) a, b, c が正の数で、 $a \neq 1, c \neq 1$ のとき、次の等式が成り立つことを示せ。 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (3) 不等式 $9^x + 3^{x+1} - 4 \leq 0$ を解け。(1) $a+b+c = k$ とおくと、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{k}$

$$\therefore k = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad \therefore k = \frac{abc}{ab+bc+ca} \quad \dots \textcircled{1}$$

(i)

$$\begin{aligned} \text{f.t. } (a+b)(b+c)(c+a) &= (k-c)(k-a)(k-b) \\ &= k^3 - (a+b+c)k^2 + (ab+bc+ca)k - abc \\ &= k^3 - k^3 + (ab+bc+ca)k - (ab+bc+ca)k \quad \textcircled{1} \text{より} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ii) (i)より、 $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ なので、

$$a+b=0 \quad \text{または} \quad b+c=0 \quad \text{または} \quad c+a=0$$

ここで、 a, b, c の対称性より、 $a+b=0$ すなわち $a=-b$ と(て考えてよい)

$$\text{このとき、} \frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{c^7}, \quad \frac{1}{a^7+b^7+c^7} = \frac{1}{c^7} \quad \text{となるので}$$

$$\frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{a^7+b^7+c^7} \quad \text{が成り立つ} \quad \square$$

(2) $\frac{\log_c b}{\log_c a} = t$ とおくと、 $\log_c b = t \log_c a \iff \log_c b = \log_c a^t$ $y = \log_c x$ のグラフは単調増加または単調減少より $b = a^t$ 両辺底 a の対数をとり $t = \log_a b \quad \square$ (3) $(3^x)^2 + 3 \cdot 3^x - 4 \leq 0 \iff (3^x + 4)(3^x - 1) \leq 0$

$$\iff \underbrace{3^x + 4}_{>0} (3^x - 1) \leq 0 \quad \therefore \underline{3^x \leq 1} \quad \therefore \underline{x \leq 0} //$$