0001414815858999

岡山県立大学

2013年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2013} \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} j}$ を求めよ．

(2) 実数 a, b を係数とする2次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる2つの虚数解をもつ．1つの虚数解を α とすると，他の解は $2\alpha-4+3i$ と表すことができる．このとき，a, b の値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(3) 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 (x, y) が

$$x=\cos 2t, \quad y=\sin t$$

で表されるとき，点Pの速さは

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

である．次の問いに答えよ．

(i) v^2 を $\cos t$ で表せ．

(ii) v の最大値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j = \frac{1}{2}k(k+1)$ より

$$(与式) = \sum_{k=1}^{2013} \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{2013}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 2\left\{1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{2013}}-\frac{1}{2014}\right\}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2014}\right)$$

$$= \underline{\frac{2013}{1007}}$$

(2) 解と係数の関係より．

$$\begin{cases} \alpha+2\alpha-4+3i=-a \\ \alpha(2\alpha-4+3i)=b \end{cases}$$

$\alpha=t+si$ (t, s は実数) とおくと，

$$\begin{cases} 3t-4+a=0 \text{ かつ } 3s+3=0 \\ 2t^2+1-4t-b=0 \text{ かつ } 4-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} s=-1 \\ t=4 \end{cases}, \begin{cases} a=-8 \\ b=17 \end{cases}$$

$\therefore \underline{a=-8,\ b=17}$

(3) (i)

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$=(-2\sin 2t)^2+(\cos t)^2$$

$$=\underline{17\cos^2 t-16\cos^4 t}$$

(ii) $t=\cos^2 t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと

$$v^2=-16t^2+17t$$

$$=-16\left(t-\frac{17}{32}\right)^2+\frac{289}{64}$$

$\therefore v^2$ の最大値は $\dfrac{289}{64}$，$\therefore v$ の最大値は $\underline{\dfrac{17}{8}}$