広島大学

2014年 第4問

$\boxed{4}$ $\alpha > 1$とする．数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $a_n > 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $\sqrt{x} - 1 \leqq \frac{1}{2}(x - 1)$ （ただし，$x \geqq 0$とする．）

(3) $a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$のとき．$a_1 = \alpha > 1$ ∴成り立つ

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると．$a_k > 1$

このとき．$a_{k+1} = \sqrt{\frac{2a_k}{a_k+1}} = \sqrt{\frac{2(a_k+1)-2}{a_k+1}} = \sqrt{2 - \frac{2}{a_k+1}}$

ここで，$a_k > 1$より．$\frac{2}{a_k+1} < 1$ ∴ $2 - \frac{2}{a_k+1} > 1$ ∴ $a_{k+1} > 1$

よって$n=k+1$のとき成り立つ

(i)，(ii)より．$n = 1, 2, 3, \cdots$に対して．$a_n > 1$ ▨

(2) $(\text{右辺}) - (\text{左辺}) = \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{x} + 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^2 \geqq 0$ ∴ $\sqrt{x} - 1 \leqq \frac{1}{2}(x-1)$ ▨

(3) $a_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} - 1$

$\leqq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2a_n}{a_n+1} - 1\right)$ （∵(2)より）

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$

$n \geqq 2$のとき． $< \frac{a_n - 1}{4}$ （∵ $a_n > 1$より）

∴ $a_n - 1 < \frac{1}{4} \cdot (a_{n-1} - 1) < \cdots < \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1 - 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$

$n=1$のときは．$a_1 - 1 = \alpha - 1$ なので．$a_1 - 1 \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot (\alpha - 1)$ が成り立つ

以上より．$n = 1, 2, 3, \cdots$に対して $a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$ が成り立つ ▨