富山県立大学

2014年 工学部 第1問

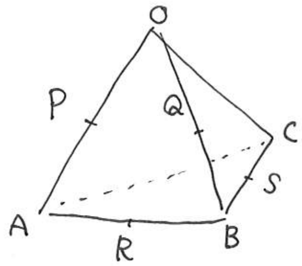
数理 石井K

$\boxed{1}$ 4点O，A，B，Cを頂点とする正四面体OABCがある．辺OA，OB，AB，BCの中点を，それぞれP，Q，R，Sとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{QR}$，$\overrightarrow{RS}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OB}$と$\overrightarrow{RS}$が垂直であることを示せ．

(3) $\overrightarrow{OC}$と$\overrightarrow{RS}$のなす角θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$を求めよ．



(1) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$= \underline{-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}$ //

$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ より $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \underline{\frac{1}{2}\vec{a}}$ //

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \underline{-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}}$ //

(2) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = r$ とおくと，

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{RS} = \vec{b} \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = -\frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$\therefore \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{RS}$ ■

(3) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{RS} = \vec{c} \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = -\frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{4}r^2$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{RS}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{RS}|}$　ここで $|\overrightarrow{RS}|^2 = \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4} \cdot r^2 - \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}r^2$

$\therefore |\overrightarrow{RS}| = \frac{r}{2}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\frac{1}{4}r^2}{r \cdot \frac{r}{2}} = \frac{1}{2}$　$\therefore$ $\cancel{\theta = 60^\circ}$

$\underline{\theta = \frac{\pi}{3}}$ //