



2014年薬学部第3問

3 実数を成分とする2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $T(A) = a + d$, $\Delta(A) = ad - bc$ と定める.

このとき, 次の問いに答えよ. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 等式 $A^2 - T(A)A + \Delta(A)E = O$ が成り立つこと (ハミルトン・ケーリーの定理) を示せ.

(2) 実数を成分とする2次の正方行列 X, Y が $XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たすとし, $\alpha = T(X)$, $\beta = \Delta(X)$ とおく.

(i) $X^2Y - YX^2$ を α を用いて表せ.

(ii) $(X^2Y - YX^2)^2 = E$, $X^4 + X^2 + E = O$ が成り立つとき, α, β の値を求めよ.