

2012年理(数・物・化)第3問

3  $\{\theta_k\}$  を初項0, 公差  $\frac{\pi}{4}$  の等差数列,  $\{r_k\}$  を初項1, 公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列とし, 自然数  $k$  に対して, 行列  $A_k, B_k$  を

$$A_k = \begin{pmatrix} r_k \cos \theta_k & r_k \sin \theta_k \\ r_k \sin \theta_k & -r_k \cos \theta_k \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} r_k \cos \theta_k & -r_k \sin \theta_k \\ -r_k \sin \theta_k & -r_k \cos \theta_k \end{pmatrix}$$

とおく.  $C_k = A_k A_{k+1}$ ,  $D_k = B_k B_{k+1}$  とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $C_k$  を  $k$  を用いて表せ.
- (2)  $D_k$  を  $k$  を用いて表せ.
- (3)  $m$  を自然数とするとき, 次の行列の和

$$\left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^2 + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^4 + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^6 + \cdots + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^{2m}$$

を求めよ.

- (4)  $C_k^2 D_k^2$  を求めよ.
- (5) 次の行列の和

$$C_1^2 D_1^2 + 2C_2^2 D_2^2 + 3C_3^2 D_3^2 + \cdots + nC_n^2 D_n^2$$

を  $\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & w_n \end{pmatrix}$  とするとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$  を求めよ.

ただし, 必要ならば, 実数  $a$  ( $a > 1$ ) に対して,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$  が成り立つことを用いてよい.