



2012年第2問

2 $f(x) = x^2 - 5$ として、数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。

$a_1 = 3$, 点 $(a_n, f(a_n))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1} とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。

次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n で表せ。

(2) 命題 $P(n)$ を $[\sqrt{5} < a_{n+1} < a_n]$ とするとき、すべての正の整数 n に対して $P(n)$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。

(3) 次の不等式が共に成り立つ 1 より小さい正の数 r が存在することを示せ。

(a) $a_{n+1} - \sqrt{5} \leq r(a_n - \sqrt{5})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(b) $a_n - \sqrt{5} \leq r^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)