



2014年 理学部（数学・情報数理）第6問

6 自然数 n に対して、和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。

(1) 各自然数 n に対して $2^k \leq n$ をみたす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき、2つの奇数 a_n, b_n が存在して

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)} b_n}$$

と表されることを示せ。

(2) $n \geq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

(3) さらに、自然数 m, n ($m < n$) に対して、和

$$S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。 $S_{m,n}$ はどんな m, n ($m < n$) に対しても整数にならないことを示せ。