

2012年 第3問

3 空間内に4点 O, A, B, C があり, 次の条件を満たすものとする.

$$OA = 1, OB = 1, OC = 2, \angle AOB = \frac{\pi}{2}, \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \angle COA = \frac{\pi}{4}$$

また, $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とし, P は平面 OAB 上の点で $\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と表されているとする. 点 P が $|\vec{OP}| = 1$ を満たして動くとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 C から平面 OAB に下ろした垂線と平面 OAB の交点を Q とする. したがって, $CQ \perp OA, CQ \perp OB$ である. $\vec{OQ} = u\vec{a} + v\vec{b}$ と表したとき, u, v を求めよ.
- (2) (i) 内積 $\vec{OP} \cdot \vec{OC}$ の最大値と最小値を求めよ. また, 最大値をとるときの x, y の値, 最小値をとるときの x, y の値をそれぞれ求めよ.
 (ii) \vec{OP} と \vec{OC} のなす角 θ がとりうる値の範囲を求めよ. ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$ とする.
- (3) 内積 $\vec{OP} \cdot \vec{OC}$ が最大値, 最小値をとるときの点 P をそれぞれ P_1, P_2 とおく. 点 P_1, P_2 はいずれも直線 OQ 上にあることを示せ. ただし, Q は (1) で定めた点とする.