金沢大学

2013年 文系 第1問

$\boxed{1}$ 座標平面上に2点 P$(\sqrt{3},\ 0)$, Q$(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ がある．次の問いに答えよ．

(1) $|\overrightarrow{PQ}|^2$ を θ で表せ．

(2) $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ を用いて，$\sin\dfrac{7\pi}{12}$ の値を求めよ．

(3) $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ における $|\overrightarrow{PQ}|^2$ の最大値と最小値を求めよ．また，最大値，最小値を与える θ の値を求めよ．

(1) $|\overrightarrow{PQ}|^2=(\sqrt{3}-\cos\theta)^2+(\sin\theta-1)^2$

$=3-2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta+1$

$=\underline{5-2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta}$ //

(2) $\sin\dfrac{7}{12}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

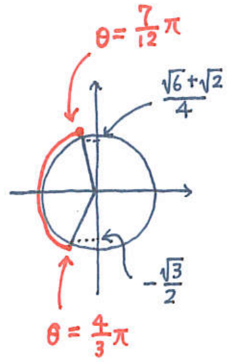
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ //

(3) (1) より．$|\overrightarrow{PQ}|^2=5-4\left(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{2}+\cos\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=5-4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

ここで，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ より．$\dfrac{7}{12}\pi\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4}{3}\pi$



$\therefore$ $|\overrightarrow{PQ}|^2$ の最大値は $5+2\sqrt{3}$ ($\theta=\pi$ のとき)

最小値は $5-\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ($\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき) —— //