

2016年理(数学科)第2問

2 以下では n は 0 以上の整数とする. 関係式

$$H_0(x) = 1, \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

によって多項式 $H_0(x), H_1(x), \dots$ を定め, $f_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ とおく.

(1) $-f''_0(x) + x^2f_0(x) = a_0f_0(x)$ が成り立つように定数 a_0 を定めよ.

(2) $f_{n+1}(x) = xf_n(x) - f'_n(x)$ を示せ.

(3) 2回微分可能な関数 $f(x)$ に対して, $g(x) = xf(x) - f'(x)$ とおく. 定数 a に対して

$$-f''(x) + x^2f(x) = af(x)$$

が成り立つとき,

$$-g''(x) + x^2g(x) = (a+2)g(x)$$

を示せ.

(4) $-f''_n(x) + x^2f_n(x) = a_nf_n(x)$ が成り立つように定数 a_n を定めよ.