名古屋工業大学

2014年 第3問

数理 石井K

3 実数 a, b, c, d について

$$(a-d)^2+4bc=0$$

が成立している．このとき行列

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\quad B=A-\frac{a+d}{2}E$$

について，以下の問いに答えよ．ただし $A\neq\frac{a+d}{2}E$ とする．

(1) 行列 B^2 を求めよ．

(2) 自然数 n に対して

$$A^n=pA+qE$$

となる実数 p, q を n と a, b, c, d で表せ．

(3) 行列 A が次をみたすとき，A を求めよ．

$$A^5=\begin{pmatrix}11&-20\\5&-9\end{pmatrix}$$

(1) $B=A-\frac{a+d}{2}E$ より

$$B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{a+d}{2}&0\\0&\frac{a+d}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a-d}{2}&b\\c&\frac{d-a}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore B^2=\begin{pmatrix}\frac{a-d}{2}&b\\c&\frac{d-a}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{a-d}{2}&b\\c&\frac{d-a}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(a-d)^2}{4}+bc&0\\0&bc+\frac{(a-d)^2}{2}\end{pmatrix}$$

$(a-d)^2+4bc=0$ より $\underline{B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}$ //

(2) (1)より $A=B+\frac{a+d}{2}E$ の両辺を n 乗して

$$A^n=n\cdot B\left(\frac{a+d}{2}\right)^{n-1}E+\left(\frac{a+d}{2}\right)^nE$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$\therefore A^n=n\cdot\left(\frac{a+d}{2}\right)^{n-1}B+\left(\frac{a+d}{2}\right)^nE$$

$$=n\left(\frac{a+d}{2}\right)^{n-1}\left(A-\frac{a+d}{2}E\right)+\left(\frac{a+d}{2}\right)^nE$$

$$=n\left(\frac{a+d}{2}\right)^{n-1}A-(n-1)\cdot\left(\frac{a+d}{2}\right)^nE$$

$$\therefore \underline{p=n\cdot\left(\frac{a+d}{2}\right)^{n-1},\quad q=-(n-1)\cdot\left(\frac{a+d}{2}\right)^n}\ //$$

(3) (2)の式に $n=5$ を代入して．

$$A^5=5\cdot\left(\frac{a+d}{2}\right)^4A-4\cdot\left(\frac{a+d}{2}\right)^5E$$

成分を比べると．

$$\begin{cases}5\left(\frac{a+d}{2}\right)^4a-4\left(\frac{a+d}{2}\right)^5=11&\cdots①\\5\left(\frac{a+d}{2}\right)^4b=-20&\cdots②\\5\left(\frac{a+d}{2}\right)^4c=5&\cdots③\\5\left(\frac{a+d}{2}\right)^4d-4\left(\frac{a+d}{2}\right)^5=-9&\cdots④\end{cases}$$

②，③より．$b=-4c\quad\cdots⑤$

$$\left(\frac{a+d}{2}\right)^4=\frac{1}{c}\quad\cdots⑥$$

①−④より $5\left(\frac{a+d}{2}\right)^4(a-d)=20$

$\therefore$ ⑥より) $a-d=4c\quad\cdots⑦$

①に⑥を代入して．$5\cdot\frac{a}{c}-4\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{a+d}{2}=11$

$\therefore 3a-2d=11c\quad\cdots⑧$

⑦，⑧より．$a=3c$，$b=-4c$，$d=-c$

これを③に代入して．$c^5=1$　c は実数より $c=1$

$$\therefore \underline{A=\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}}\ //$$