

2016年理(数学科)第4問

4 サイコロを何回か振って最後に出た目を得点とするゲームを行う。

- (1) サイコロを1回だけ振ることができるときの得点の期待値  $E_1$  を求めよ。
- (2) サイコロを2回まで振ることができるとき、1回目に  $m$  以上の目が出たらそこでやめ、 $m$  より小さい目が出たら2回目を振ることにする。このときの得点の期待値  $E_2(m)$  を  $m$  を用いて表し、 $E_2(m)$  が最大となる  $m$  を求めよ。
- (3)  $n$  を2以上の自然数、 $m_1, \dots, m_{n-1}$  を6以下の自然数とする。 $n$ 回までサイコロを振ることができるとき、 $i$ 回目に  $m_{n-i}$  以上の目が出たらそこでやめ、 $m_{n-i}$  より小さい目が出たら  $i+1$ 回目を振るという規則でサイコロを振り続ける。ただし、 $n$ 回サイコロを振ったらそこでやめる。このときの得点の期待値を  $E_n(m_1, \dots, m_{n-1})$  とする。以下の問いに答えよ。
- (i)  $E_3(m_1, m_2)$  を  $E_2(m_1), m_2$  を用いて表し、 $E_3(m_1, m_2)$  が最大となる  $m_1, m_2$  とそのときの  $E_3(m_1, m_2)$  の値を求めよ。
- (ii)  $n \geq 4$  とする。 $E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2})$  の最大値を  $e_{n-1}$  とすると、 $E_n(m_1, \dots, m_{n-1})$  が最大となるのは、 $E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2})$  が  $e_{n-1}$  となり、かつ  $m_{n-1}$  が  $e_{n-1}$  以上の最小の自然数となるときである。このことを示せ。

ただし、得点が  $k$  となる確率を  $p(k)$  としたとき、

$$p(1) + 2p(2) + 3p(3) + 4p(4) + 5p(5) + 6p(6)$$

を得点の期待値とよぶ。