

2010年理系第3問

3 単位行列 E の実数倍ではない行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. A で表わされる xy 平面上の移動を f とする.

- (1) $A^2 = kE$ を満たす実数 k が存在するための必要十分条件は, $a + d = 0$ であることを示せ.
- (2) $a + d = 0$ のとき, 原点 O とは異なる点 P で, $f(P)$ が直線 OP 上にあるものが存在すれば, $a^2 + bc \geq 0$ であることを示せ.
- (3) $a + d = 0$ かつ $a^2 + bc \geq 0$ であるとする. このとき $\lambda = \sqrt{a^2 + bc}$ とおけば, $(A - \lambda E)(A + \lambda E) = O$ が成り立つことを示せ. ただし, O は零行列とする.
- (4) (3) の仮定のもとで, $\lambda = \sqrt{a^2 + bc}$ とおく. 原点 O とは異なる点 P で, $Q = f(P)$ とすれば, $\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP}$ となるものが存在することを示せ.