



2012年理系第5問

5 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が次の条件 (D) を満たすとする.

(D)  $A$  の成分  $a, b, c, d$  は整数である. また, 平面上の4点  $(0, 0), (a, b), (a+c, b+d), (c, d)$  は, 面積1の平行四辺形の4つの頂点をなす.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 行列  $BA$  と  $B^{-1}A$  も条件 (D) を満たすことを示せ.

(2)  $c = 0$  ならば,  $A$  に  $B, B^{-1}$  のどちらかを左から次々にかけることにより, 4個の行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  のどれかにできることを示せ.

(3)  $|a| \geq |c| > 0$  とする.  $BA, B^{-1}A$  に少なくともどちらか一方は, それを  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  とすると

$$|x| + |z| < |a| + |c|$$

を満たすことを示せ.