

2012年教育第1問

1 次の小問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 実数 a, b が $0 \leq a \leq \pi, a < b$ をみたすとき,

$$I(a, b) = \int_a^b e^{-x} \sin x \, dx$$

とおく. ただし, e は自然対数の底とする.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} I(a, b) = 0$$

が成立するように a を定めよ.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc = 2$ および $a + d = 3$ をみたし, かつ, ある行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

に対して $AB = BA$ をみたしている. ただし $\alpha \neq \beta$ とする. このような行列 A をすべて求めよ.

(3) c を正の実数として, 漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2}{3^n} \quad (n \geq 1), \quad a_0 = c$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となるような c の範囲を求めよ.

(4) 実数 t が $1 \leq t \leq 2$ の範囲で動くとき, xy 平面の直線

$$y = (3t^2 - 4)x - 2t^3$$

が通る範囲を H とする. H の内, 直線 $x = 1$ と $x = \frac{20}{9}$ ではさまれる部分の面積を求めよ.