0001551818448999

学習院大学

2013年 文学部 第3問

$\boxed{3}$ 条件

$f_1(x)=x^3-2x^2+1 \quad \cdots ①$
$f_n(x)=xf'_{n-1}(x)+f_{n-1}(x) \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \quad \cdots ②$

によって定まる整式 $f_n(x)$ を求めよ．ただし，$f'_{n-1}(x)$ は $f_{n-1}(x)$ の導関数である．

②より，$f_{n-1}(x)$ の次数を k とすると，$xf'_{n-1}(x)$ の次数も k となり，

$f_n(x)$ の次数は k 以下となる

$\therefore$ ($f_n(x)$の次数) $\leqq$ ($f_{n-1}(x)$の次数) $\leqq \cdots \leqq$ ($f_1(x)$の次数) $=3$

よって，$f_n(x)=a_nx^3+b_nx^2+c_nx+d_n$ （a_n, b_n, c_n, d_n は実数）とおくと，

②より，

$$a_nx^3+b_nx^2+c_nx+d_n = x(3a_{n-1}x^2+2b_{n-1}x+c_{n-1})+a_{n-1}x^3+b_{n-1}x^2+c_{n-1}x+d_{n-1}$$
$$= 4a_{n-1}x^3+3b_{n-1}x^2+2c_{n-1}x+d_{n-1}$$

係数を比較して，

$$\begin{cases} a_n=4a_{n-1} & \leftarrow \text{公比4の等比数列} \\ b_n=3b_{n-1} & \leftarrow \quad〃\ 3 \quad〃 \\ c_n=2c_{n-1} & \leftarrow \quad〃\ 2 \quad〃 \\ d_n=d_{n-1} & \leftarrow \quad〃\ 1 \quad〃 \end{cases}$$

いま，$a_1=1$，$b_1=-2$，$c_1=0$，$d_1=1$ より，

$a_n=1\cdot 4^{n-1}$，$b_n=-2\cdot 3^{n-1}$，$c_n=0$，$d_n=1$

$$\therefore \underline{f_n(x)=4^{n-1}x^3-2\cdot 3^{n-1}x^2+1}\ _{〃}$$

（別解）数学的帰納法を使っても解ける．