0001731818628999

青山学院大学

2012年 理工A方式第4問

$\boxed{4}$ 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ を C とする．

(1) 曲線 C 上の点 A(1, 1) を通り，傾き $-m$ $(0<m<1)$ の直線と曲線 C の交点のうち，A と異なる点を B とする．点 B の座標，および線分 AB の長さ l を求めよ．

(2) 直線 AB と曲線 C によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) $m\to+0$ のとき，$\dfrac{S}{l}$ の極限値を求めよ．ただし，$\lim\limits_{x\to+0} x\log x=0$ であることを用いてよい．

数理 石井K

(1) 直線の方程式は $y=-m(x-1)+1$　　$\therefore\ y=-mx+m+1$

$\therefore\ \dfrac{1}{x}+mx-m-1=0$　　両辺に x をかけて．

$mx^2-(m+1)x+1=0$

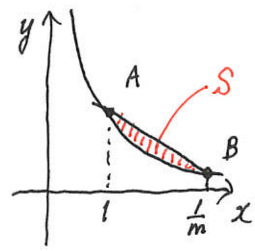
$(x-1)(mx-1)=0$　　$\therefore\ \underline{B\left(\dfrac{1}{m},\ m\right)}$ //

$l^2=\left(\dfrac{1}{m}-1\right)^2+(m-1)^2$

$=\dfrac{1}{m^2}(m-1)^2+(m-1)^2$

$=\dfrac{m^2+1}{m^2}\cdot(m-1)^2$　　$0<m<1$ より．$\underline{l=\dfrac{1-m}{m}\sqrt{m^2+1}}$ //

(2) $S=\displaystyle\int_1^{\frac{1}{m}} -mx+m+1-\frac{1}{x}\,dx$



$=\left[-\dfrac{m}{2}x^2+(m+1)x-\log|x|\right]_1^{\frac{1}{m}}$

$=-\dfrac{1}{2m}+1+\dfrac{1}{m}+\log m+\dfrac{m}{2}-m-1$

$=\underline{\dfrac{1}{2m}-\dfrac{m}{2}+\log m}$ //

(3) $S=\dfrac{1-m^2+2m\log m}{2m}$ より，

$\dfrac{S}{l}=\dfrac{1-m^2+2m\log m}{2(1-m)\sqrt{m^2+1}}\ \longrightarrow\ \underline{\dfrac{1}{2}\ (m\to+0)}$ //