



2014年 第5問

1枚目 / 3枚

5  $n$  を正の整数とし、 $x \geq 0$  とする。以下の問に答えよ。

- (1)  $r_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right)$  とする。 $r_n(x) \geq 0$  を  $n$  に関する数学的帰納法を使って示せ。
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$  を示せ。
- (3)  $t \geq 0$  とし、 $f(t) = \int_0^t x^n e^{-x} dx$  とする。 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  を求めよ。

(1)  $r_n(x) \geq 0$  を数学的帰納法で示す。

(i)  $n=1$  のとき。

$$r_1(x) = e^x - (1 + x)$$

$$\therefore r_1'(x) = e^x - 1 \geq 0 \quad (\because x \geq 0 \text{ より})$$

$$\therefore r_1(x) \text{ は } x \geq 0 \text{ において単調増加であり、} r_1(x) \geq r_1(0) = 0$$

$\therefore n=1$  のときは成り立つ。

(ii)  $n=k$  のとき成り立つと仮定すると、 $x \geq 0$  に対して。

$$r_k(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right) \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1} \text{ が成り立つ}$$

$$\text{このとき、} r_{k+1}(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}\right)$$

$$\therefore r_{k+1}'(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}x^{k-1} + \frac{1}{k!}x^k\right)$$

$$= r_k(x)$$

$$\geq 0 \quad (\because \textcircled{1} \text{ より})$$

$$\therefore r_{k+1}(x) \text{ は、} x \geq 0 \text{ において単調増加であり、} r_{k+1}(x) \geq r_{k+1}(0) = 0$$

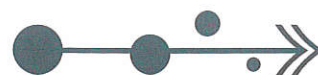
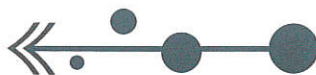
$\therefore n=k+1$  のとき成立する。

(i), (ii) より、すべての正の整数  $n$  について、 $x \geq 0$  において、 $r_n(x) \geq 0$  が成立する  $\square$

(2) (1) より、 $x \geq 0$  において。

$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\therefore e^{-x} \leq \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}} \quad \cdots \textcircled{2}$$



2014年 第5問

2枚目 / 3枚

 数理  
石井K

 5  $n$  を正の整数とし、 $x \geq 0$  とする。以下の問に答えよ。

- (1)  $r_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n\right)$  とする。 $r_n(x) \geq 0$  を  $n$  に関する数学的帰納法を使って示せ。
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$  を示せ。
- (3)  $t \geq 0$  とし、 $f(t) = \int_0^t x^n e^{-x} dx$  とする。 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  を求めよ。

(2) のつづき

 $x \geq 0$  のとき、 $x^n e^{-x} \geq 0$  であることと ② の両辺に  $x^n (\geq 0)$  をかけることにより、

$$0 \leq x^n e^{-x} \leq \frac{x^n}{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

 $x \rightarrow \infty$  のとき、(右辺)  $\rightarrow 0$  であるから、はさみうちの原理により、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \square$$

 (3)  $I_n = \int_0^t x^n e^{-x} dx$  とおくと、

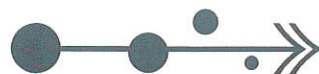
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^t x^n (-e^{-x})' dx \\ &= [-x^n e^{-x}]_0^t + \int_0^t n x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= -t^n e^{-t} + n I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{I_n}{n!} - \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{-t^n e^{-t}}{n!}$$

$$\therefore \frac{I_n}{n!} = \frac{I_1}{1!} - \sum_{k=2}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} \quad (n=2, 3, 4, \dots) \quad \text{--- ③}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} I_1 &= \int_0^t x (-e^{-x})' dx \\ &= [-x e^{-x}]_0^t + \int_0^t e^{-x} dx \\ &= -t e^{-t} + [-e^{-x}]_0^t \\ &= -(t+1)e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{よって、③より、} \frac{I_n}{n!} = 1 - (t+1)e^{-t} - \sum_{k=2}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} \quad \text{--- ④}$$



2014年 第5問

3枚目 / 3枚

5  $n$  を正の整数とし、 $x \geq 0$  とする。以下の問に答えよ。

- (1)  $r_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n\right)$  とする。 $r_n(x) \geq 0$  を  $n$  に関する数学的帰納法を使って示せ。
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$  を示せ。
- (3)  $t \geq 0$  とし、 $f(t) = \int_0^t x^n e^{-x} dx$  とする。 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  を求めよ。

(3) のつぎ。

④ より。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} I_n \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( n! - \sum_{k=0}^n \frac{n! t^k e^{-t}}{k!} \right) \\ &\quad \text{(2)より} \rightarrow 0 \\ &= \underline{n!} // \end{aligned}$$