岩手大学

2016年 教育学部 第2問

$\boxed{2}$ 平行四辺形 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とおき，

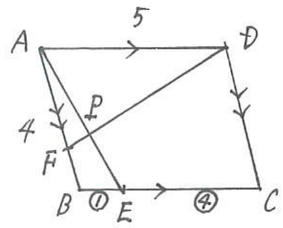
$$|\vec{a}|=4,\quad |\vec{b}|=5,\quad |\overrightarrow{AC}|=6$$

であるとする．また，辺 BC を $1:4$ に内分する点を E，辺 AB を $s:(1-s)$ に内分する点を F とし（ただし，$0<s<1$），線分 AE と線分 DF の交点を P とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および s で表せ．

(3) 平行四辺形 ABCD の2本の対角線 AC と BD の交点を Q とする．$\overrightarrow{PQ}$ が $\vec{b}$ と平行であるとき，s の値および $|\overrightarrow{AP}|$ の値を求めよ．



(1) 余弦定理より．

$$\cos\angle ABC=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$$

$\angle ABC+\angle BAD=180^\circ$ より．$\cos\angle BAD=-\frac{1}{8}$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\angle BAD=4\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\underline{-\frac{5}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

A，P，E は同一直線上にあるので，$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AE}$（$k$：実数）と表せる．

$$\therefore\ \overrightarrow{AP}=k\vec{a}+\frac{1}{5}k\vec{b}\ \cdots ①$$

一方，$FP:PD=t:1-t$（$0<t<1$）とおくと．

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AF}+t\vec{b}$$
$$=s(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\ \cdots ②$$

①，② の係数を比較して．$k=s(1-t)$ かつ $\frac{1}{5}k=t$

$$\therefore\ k=\frac{5s}{s+5}\qquad \therefore\ ①\text{ より }\ \underline{\overrightarrow{AP}=\frac{5s}{s+5}\vec{a}+\frac{s}{s+5}\vec{b}}$$

(3) 平行四辺形の2本の対角線は中点で交わるから $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{2}-\frac{5s}{s+5}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{s+5}\right)\vec{b}$$

これが $\vec{b}$ と平行より $\frac{1}{2}-\frac{5s}{s+5}=0\qquad \therefore\ \underline{s=\frac{5}{9}}$

そのとき．

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AP}|^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{100}|\vec{b}|^2+\frac{1}{10}\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=4$$

$$\therefore\ \underline{|\overrightarrow{AP}|=2}$$