

2016年教育学部第3問

 数理
石井K

 3 初項 a 、公差 d の等差数列 $a_n = a + (n-1)d$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) について、次の問いに答えよ。

(1) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく。 S_7 と S_{11} を、それぞれ a と d の式で表せ。

(2) $T_n = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$ とおく。 T_{11} を a と d の式で表せ。

(3) $S_7 = 0$ かつ $(S_{11})^2 - T_{11} = 440$ のとき、 a と d の値を求めよ。

(1) $S_7 = \frac{1}{2} \cdot 7(2a+6d) = \underline{7a+21d}$ //

$S_{11} = \frac{1}{2} \cdot 11(2a+10d) = \underline{11a+55d}$ //

(2) $T_n = \sum_{k=1}^n \{a+(k-1)d\}^2$

$= \sum_{k=1}^n a^2 + 2(k-1)ad + (k-1)^2 d^2$

$= \sum_{k=0}^{n-1} a^2 + 2kad + k^2 d^2$

$= d^2 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 2ad \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} a^2$

$= d^2 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + 2ad \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + a^2 n$

$= \frac{1}{6}d^2(n-1)n(2n-1) + adn(n-1) + a^2 n$

$\therefore T_{11} = \underline{385d^2 + 110ad + 11a^2}$ //

(3) $S_7 = 0 \iff 7(a+3d) = 0$

$\iff a+3d = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$(S_{11})^2 - T_{11} = 440 \iff \{11(a+5d)\}^2 - (385d^2 + 110ad + 11a^2) = 440$

$\iff 11(a+5d)^2 - 35d^2 - 10ad - a^2 = 40 \quad \dots \textcircled{2}$

②に①を代入して、 a を消去すると、 $30d^2 = 40$

$\therefore d = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 、そのとき $a = \mp 2\sqrt{3}$

$\therefore (a, d) = \left(\pm 2\sqrt{3}, \mp \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$ (複号同順) //